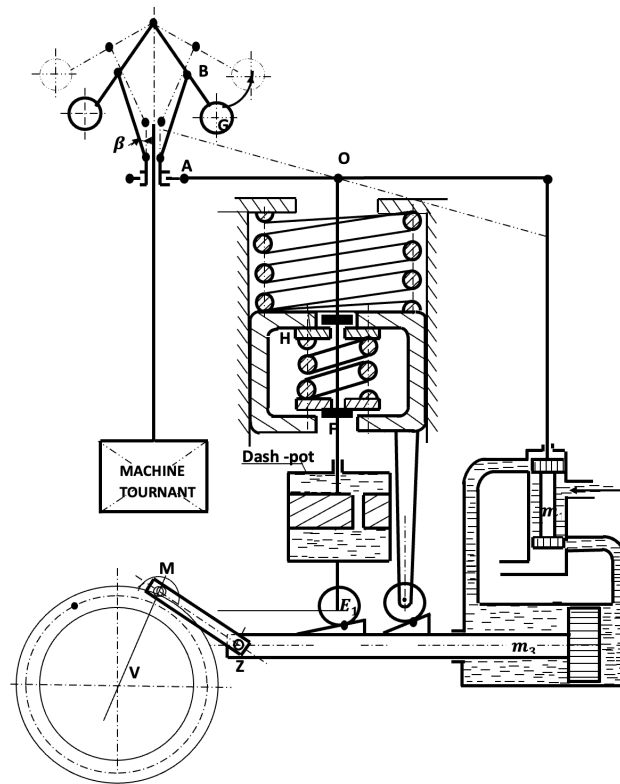


RÉGULATION DES TURBINES HYDRAULIQUES

Tome 1: MODÉLISATION DES ORGANES DE RÉGULATION

DASSI JEAN MARIE, *Diplômé de L'ENSET DE DOUALA*
DAMAKWAMA DJO NTA



SPÉCIALITÉS CIBLES : MÉCATRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, GÉNIE MÉCANIQUE, GÉNIE CIVIL (MANUTENTION), GÉNIE FORESTIER (MANUTENTION), MARINE, ETC.

PENSÉE

*« L'Homme est un générateur à Télécommande et La Femme un
Générateur à corde.*

*L'Homme transmet ce qu'il a par les ondes sans fil commune mais
la femme utilise son attachement matériel pour transmettre ce qui
a toujours tendance à marquer du retard à la communication.
Encore faut-il être capable de passer du matériel à l'énergie. »*

REMERCIEMENTS

LES auteurs ainsi que leurs éditions vous seraient reconnaissants pour ce qui est des divers avantages et faveurs qu'ils ont eu de vous tout au long de l'élaboration de cet ouvrage car si nous osons nous référer à quoi la nature même nous renvoie l'HISTOIRE par quoi nous ne serions, nous ne pouvons ne pas nous retourner et regarder derrière. À ce titre donc nous vous adressons nos remerciements. Ils vont particulièrement aux personnages ci-dessous. Donc :

- Au Dieu des ancêtres, des remerciements nous amèneront droit au blasphématoire puisque nous ne suivons que des pas déjà tracés ;
- À Mes parents qui, bien que morts, sont toujours avec moi car d'avant l'enfant, au sein on est, et sera, qu'importe l'état. Déjà que peut-on faire sans être dans la suite de la nature ? ;
- À Papa DJOSSI FÉLIX qui, très tôt m'a attribué des titres « QUESTION ? LAWYER » que je ne sais si je parviendrai à les atteindre avant de passer à un autre état de la nature ;
- À Papa FOSSO LUCAS par qui dut pour la première fois me demander de venir officiellement dans une école primaire ;
- Au corps enseignant de l'ÉCOLE CEBEC TOUGANG qui dut m'accepter dans leur école et dut constituer un véritable départ pour ce qui est de mon école aujourd'hui ;
- À mon MAÎTRE DU cours moyen 1 M. TOUKAM GILBERT qui, pour la première fois m'appela écrivain dont je me demande si je le serai vraiment avant de quitter cet état que je porte actuellement ;
- À M. LEUNKEU SAMUEL, mon enseignant de 4^e année qui, après des remarques sur des réponses d'exercices de calcul d'une épreuve d'examen de CAP MG passée et corrigée plusieurs fois, dut dire aux camarades de retour de pause que dans sa classe il a des philosophes et des savants ;
- À mon camarade MOABANG NINTEDEM MOÏSE qui me dit un jour en classe de seconde que ma philosophie est creuse et obscure, et je lui répondis que c'était déjà bien que j'en aie et que c'était à lui de la remplir et l'éclairer ;
- À Mon professeur de L'ENSET DE DOUALA NJEUGNA ÉBÉNÉZER qui a toujours engendré ou suscité en moi un sens réel de l'école ;
- À bien d'autres à l'instar de RÉMY HIRTZ qui a toujours été pour nous un sens de rigueur permanent.

AVANT-PROPOS

LE cours d'AUTOMATIQUE, régulièrement dispensé aux étudiants de BTS et INGÉNIEURS, ne saurait être uniquement une chose racontée sans support susceptible de faire passer des définitions aux objets dont il est question d'étudier : pour ce cas, il est question des groupes hydrauliques et des réservoirs de retenue ou même de barrages. Or étudier des objets mouvants revient, sauf cas rare, à faire de la dynamique et comme telle à penser à ce qui est fixe, ce qui bouge et ce qui le fait bouger sans oublier les supports ou bâtis. Est-ce qu'il bouge pour l'état de destruction ou l'état conservé : voilà qui va amener à savoir si on est stable ou instable, si on est rapide ou lent, ou encore si précis ou imprécis. Aussi aurons-nous envie de parler de stabilité, de rapidité, de précision d'où des informations d'entrée des systèmes et des informations de sortie des systèmes. Des éléments chargés de prendre ces informations ou de les traduire en langage permettant de comparer pour savoir si les éléments adoptés pour pallier aux difficultés des systèmes sont fiables, soit donc nécessaires. Pour cela, on aura souvent besoin de génératrice tachymétrique, de comparateur ou sommateur ou montre ou autres. Bien des auteurs ont essayé d'aborder ces problèmes : JAMES WATT, HENRI POINCARÉ, ROUTH, POPOV et autres, bien que non tous de la même façon. Nous ferons souvent recours à l'un d'entre eux tantôt pour un des aspects de difficultés rencontrées, tantôt pour un autre ; soit pour une détermination analytique, soit pour une détermination graphique. Des exercices sont abordés ici et ayant pour but de matérialiser et modéliser ces problèmes pour mieux les aborder. On parlera dans ces cas de système régulateur ou de système asservi. Mais nous avons pensé que pour mieux les aborder et éviter trop de dispersion ou confusion qu'une pièce qui se déplace donne son indice à la direction du déplacement. Par exemple, si le tiroir 2 se déplace, on dira $x_2(t)$ comme variable.

En effet, WATT a particulièrement mis au point le régulateur embryonnaire qui interviendra pour presque tous les cas d'études hydrauliques de ce Tome 1. Chaque cas présentera un dispositif d'amélioration particulière qui sera le point focal de l'étude. L'exercice 1 est basé sur les généralités d'étude d'un régulateur. L'exercice 2 s'intéresse particulièrement à celui de JAMES WATT tel que conçu à l'origine et utilisé dans les machines à vapeur. L'exercice 3 quant à lui s'évertue à corriger le manque de grande puissance du dispositif en ajoutant le dispositif conséquent. L'exercice 4 procède à la multiplication de puissance mais en procédant de manière indirecte par articulation de levier sur le piston de vannage. L'exercice 5 va amener la tige de commande du tiroir à être coulissante pour rendre le dispositif asservi. L'exercice 6 va corriger le manquement de l'asservissement rigide et pour corriger, y ajouter le ressort et l'amortissement au dispositif d'asservissement. L'exercice 7 va améliorer l'asservissement à compensation en lui ajoutant une came de statisme.

SOMMAIRE

PART I	AUTOMATIQUE	1
I	NOTION DE SYSTÈME	1
	1-11 DÉFINITIONS	1
	1-12 TYPES DE SYSTÈMES ASSERVIS	2
	1-13 ILLUSTRATION DES TYPES DE SYSTÈMES	2
II	SYSTÈMES LINÉAIRES	4
	2-1 DÉFINITIONS	4
	2-2 SCHÉMAS BLOCS OU DIAGRAMMES FONCTIONNELS	5
	2-4 PRINCIPE DE RÉDUCTION D'UN DIAGRAMME FONCTIONNEL OU SCHÉMA BLOC	7
	2-44 FORME D'UNE STRUCTURE EN BOUCLE FERMÉE	8
	2-5 TRANSFORMÉE DE LAPLACE	10
	2-52 PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE	13
	2-522 Transformée de Laplace inverse de $f(t)$ notée $L^{-1}[F(P)]$, soit :	14
	2-523 Théorème de la valeur finale	15
	2-524 Théorème de la valeur initiale	15
	2-6 DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT À PARTIR DU SCHÉMA DE MONTAGE	16
	2-61 DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT OU TRANSMITTANCE	16
	2-62 DÉTERMINATION DE LA FORME GÉNÉRALE DE LA FONCTION DE TRANSFERT	16
	2-63 TRACÉS DES SCHÉMAS FONCTIONNELS	18
	2-7 ÉTUDE GÉNÉRALE DES COMPORTEMENTS DYNAMIQUES DES SYSTÈMES	21
	2-71 ÉTUDE DES RÉPONSES DES SYSTÈMES ASSERVIS	22
	2-72 ÉTUDE DES SYSTÈMES DU 1 ^{er} ORDRE	30
	2-73 ÉTUDE DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2 ^{ème} ORDRE AUX ENTRÉES USUELLES	35

PART I. AUTOMATIQUE

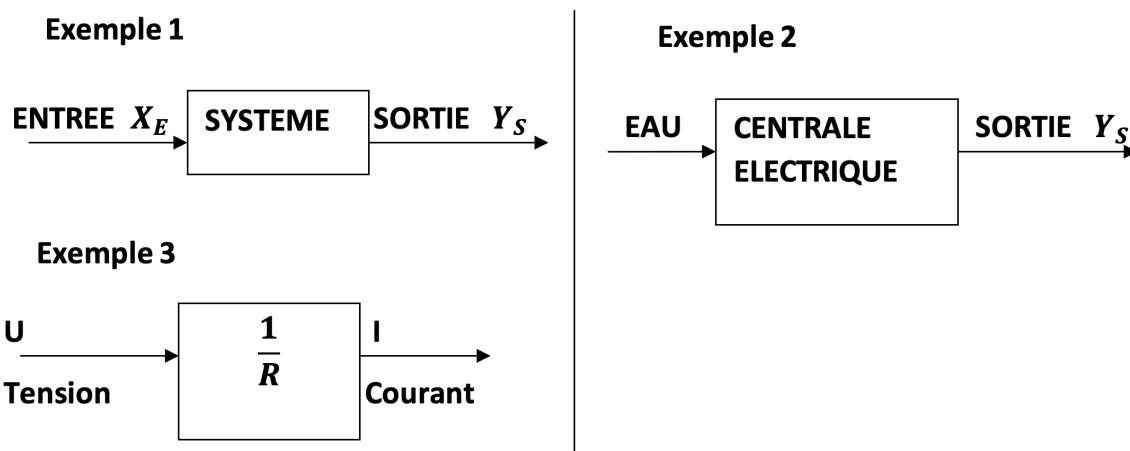
I. NOTION DE SYSTÈME

1-11 DÉFINITIONS

1-111 DÉFINITION DE SYSTÈME

UN système est, un assemblage de ou combinaison de parties ou composants liés les uns aux autres et qui se combinent de façon à réaliser une ou plusieurs fonctions.

On peut encore l'appeler processus. En schématisation, un système est représenté par un bloc ou une boîte avec au moins deux flèches dont l'une entrant dans la boîte ou « ENTRÉE » et l'autre sortant de la boîte ou « SORTIE ». La Fig. 1 ci-dessous donne quelques exemples :



1-112 DÉFINITION DE ENTRÉE

Ce sont des éléments, grandeurs ou signaux, informations qui, issues du milieu extérieur, apportent au système ce dont il a besoin pour accomplir sa mission.

1-113 DÉFINITION DE SORTIE

Ce sont des éléments, grandeurs, signaux ou informations produits par le système.

1-114 DÉFINITION DE RÉFÉRENCE OU CONSIGNE

C'est la grandeur ou modèle parfaitement connu, dont le comportement est celui attendu du système ou processus.

Dans un système bouclé, on essaie de calquer la sortie réglée sur l'entrée ou référence en minimisant autant que possible l'écart entre les deux.

1-115 DÉFINITION DE PERTURBATION

Ce sont des entrées parasites que l'on ne peut pas manipuler (incontrôlables) que le système doit subir.

1-116 DÉFINITION DE SYSTÈME CAUSAL

Si la variable indépendante est le temps, un système suit le principe de causalité si la sortie ne dépend que des valeurs présentes et passées (conditions initiales) de la variable d'entrée. Par conséquent, il n'est pas possible de prévoir les valeurs de la variable d'entrée. Rien n'arrive sans qu'il ait une cause ou une raison déterminée.

1-12 TYPES DE SYSTÈMES ASSERVIS

On distingue essentiellement les systèmes essentiellement linéaires et les systèmes asservis non linéaires.

1-121 SYSTÈME ASSERVI STATIONNAIRE

Un système asservi est stationnaire si ses caractéristiques ne changent pas au cours de l'évolution du temps.

1-122 SYSTÈMES CONTINUS ET ÉCHANTILLONNÉS

Un système continu est un système dont les caractéristiques évoluent au cours du temps et de manière continue.

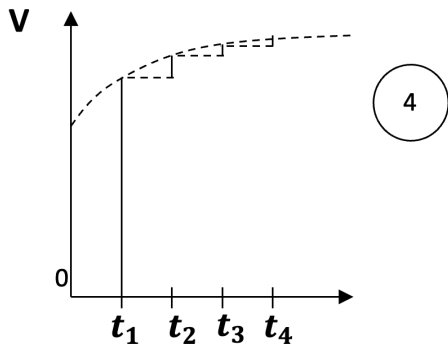
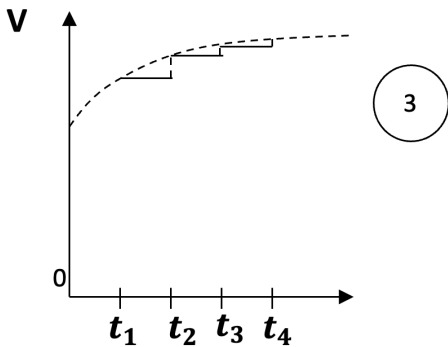
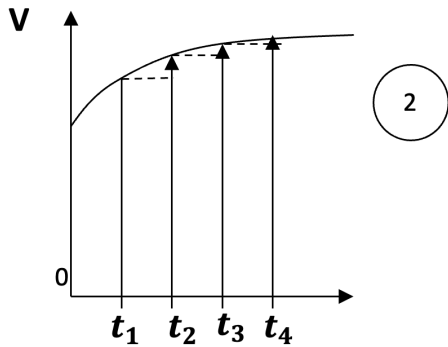
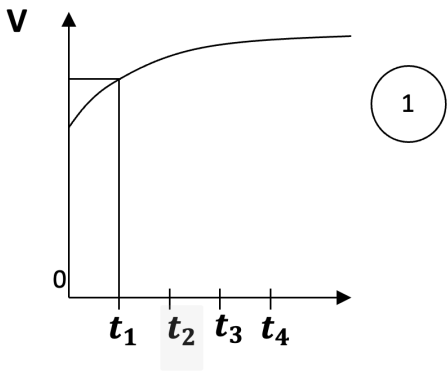
À la notion de système continu correspond un système analogique.

À la notion de système échantillonné correspond un système numérique ou digital.

AMPLITUDE	TEMPS D'OBSERVATION	
	CONTINU	DISCRET
CONTINUE	SYSTÈME ANALOGIQUE (1)	SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ (2)
QUANTIFIÉE	SYSTÈME NUMÉRIQUE ANACHRONIQUE (DIGITAL) (4)	SYSTÈME NUMÉRIQUE SYNCHRONIQUE (DIGITAL SYNCHRONIQUE) (3)

1-13 ILLUSTRATION DES TYPES DE SYSTÈMES

La Fig. 2 présente en terme de type de cas spécifique avec en continu le paramètre considéré comme le déterminant.



II. SYSTÈMES LINÉAIRES

2-1 DÉFINITIONS

2-11 DÉFINITION DE SYSTÈME LINÉAIRE

Un système ou une équation est linéaire si
 uniquement au premier degré.

Par exemple, si la fonction F reliant x et y est linéaire, quelles que soient les entrées constantes a et b , pour les variables x_1 et x_2 , on peut écrire :

$y =$

Avec les systèmes linéaires, on peut : de chaque variable et obtenir l'effet par superposition des effets de toutes les variables. On parle aussi de principe

Donc un système peut être mis sous

Du fait que le système évolue c'est une équation différentielle et l'ordre de ce système est l'ordre de cette équation différentielle. Mettre un système en équation

2-12 DÉFINITION DE : ASSERVISSEMENT

Il consiste à appliquer
 (sorties réglées). Le signal d'entrée ou consigne, suit une loi de référence, généralement non fixée à l'avance, et le système fonctionne en mode poursuite par rapport à cette loi. Le comportement est et les entrées varient rapidement et fréquemment.

2-13 DÉFINITION DE : RÉGULATION

Elle consiste à maintenir constante
 (sortie réglée). Le signal de référence ou consigne reste constant toute la durée de vie du système ou pendant une durée plus ou moins longue. On a un comportement régulateur et

2-2 SCHÉMAS BLOCS OU DIAGRAMMES FONCTIONNELS

2-21 DÉFINITION DE DIAGRAMME FONCTIONNEL

2-211 Définition de schéma bloc

Ce sont des Ils permettent de décrire sous forme de blocs ou boîtes les systèmes asservis et les différentes interactions entre les parties.

2-212 Éléments de base :

La représentation schématique de base d'un système bloc repose sur quatre éléments :

a) Bloc

Un bloc peut d'un système. Deux flèches dont l'une entrant constitue l'entrée tandis que l'autre sortant constitue la sortie (Fig. 3).

La sortie de la boîte est égale par la sortie.

Par exemple : $I = \frac{1}{R} U$

Exemple : 1

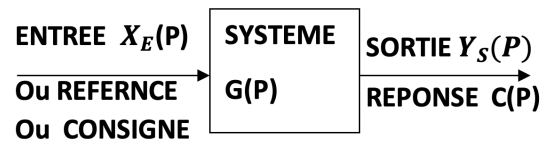


Fig.3

b) Comparateur

Il permet de La Fig. 4 en donne un exemple.

Exemple : 2

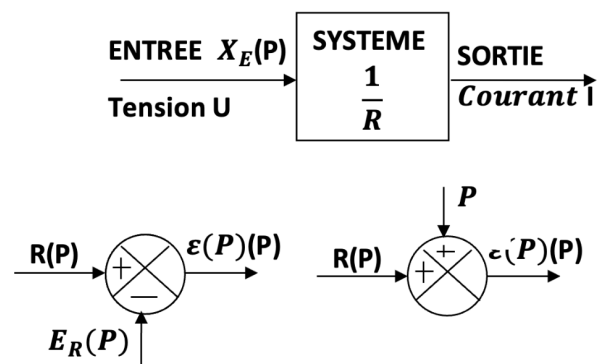


Fig.4

c) Dérivation

C'est le point ... comme le présente la Fig. 5.
Les éléments de la Fig. 5 b ne seront pas moins représentatifs en termes de signification.

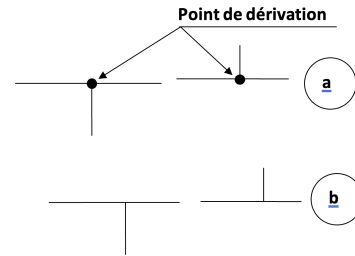


Fig.5

2-3 SCHÉMA GÉNÉRAL D'UN SYSTÈME À ASSERVISSEMENT

- 1 :
- 2 :
- 3 :
- 4 :
- 5 :
- 6 :

Le schéma de la Fig. 6 indique les divers éléments à être identifiés sur un schéma bien que parfois ils ne sont pas tous sur un même schéma ou y sont mais nécessitent bien de la diligence pour être repérés. Il sera démontré dans la suite.

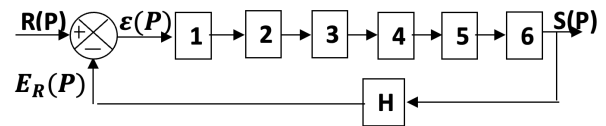


Fig.6

2-4 PRINCIPE DE RÉDUCTION D'UN DIAGRAMME FONCTIONNEL OU SCHÉMA BLOC

Soit le schéma bloc de la Fig. 7.

2-41 ÉQUATIONS FONDAMENTALES DU SYSTÈME BLOC À COMPAREUR

Du schéma de la Fig. 7 nous formons avec la relation sortie-entrée d'un bloc trois équations fondamentales de réduction d'un système bloc :

$$\begin{cases} S(P) = \dots\dots\dots (1) \\ \varepsilon(P) = \dots\dots\dots (2) \\ E_R(P) = \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

De ce système, nous avons

.....
.....
.....
.....

Ceci est la forme canonique.

La représentation du bloc concerné est en Fig. 8.

2-42 DIAGRAMME À PERTURBATION

Soit le diagramme de la Fig. 9 suivant :

Ce schéma comporte deux entrées :

- a) R l'entrée
- b) P l'entrée

SOLUTION

Comme on est en système asservi linéaire
 R pour
 résultat de sortie C_R puis le système à entrée
 P . pour sortie C_P puis combinant enfin par
 principe d'additivité pour le résultat global à
 sortie $C = \dots\dots\dots$

Procédons donc à la décomposition en Fig. 10 à 12 :

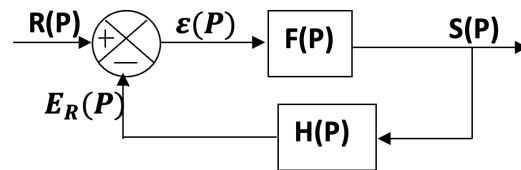


Fig.7

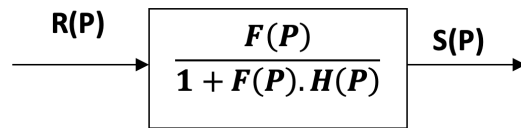


Fig.8

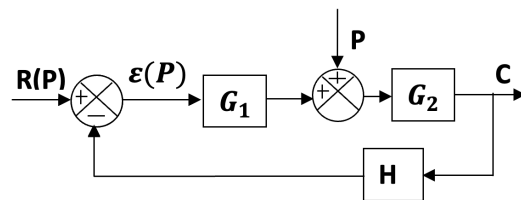


Fig.9

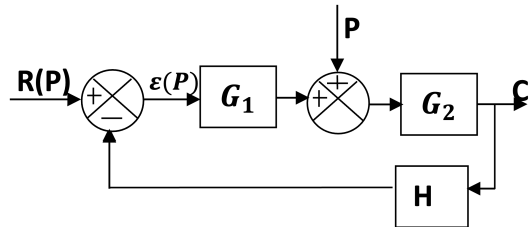


Fig.10

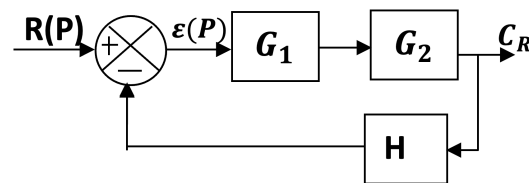


Fig.11

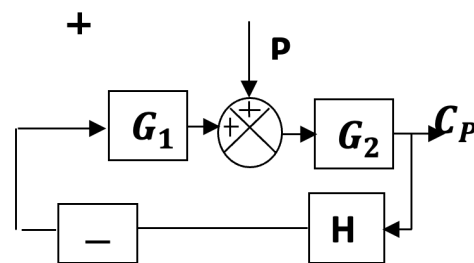


Fig.12

$R(P)$ est l'entrée du système

$E_R(P)$ est l'entrée du système

2-42 FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMÉE

La fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(P)$ est par

2-43 FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERT FTBO(P)

Elle est donnée par l'expression

Lorsque $H(P) = 1$, le système est à retour (Fig. 13).

La forme canonique est alors donnée par :

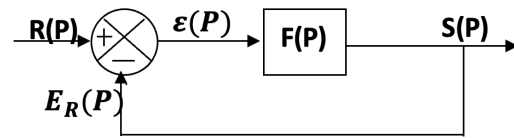


Fig.13

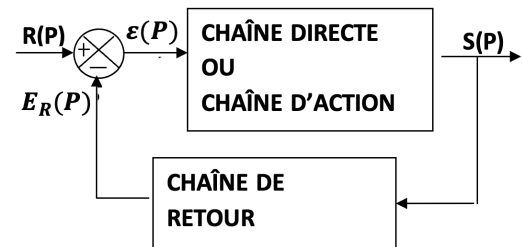


Fig.14

Soit le schéma de la Fig. 14.

2-44 FORME D'UNE STRUCTURE EN BOUCLE FERMÉE

Les systèmes en boucles fermées apparaissent chaque fois qu'au cours de son

opération, Fig. 15.

La représentation se compose d'une chaîne directe ou d'action, d'une chaîne de retour et d'un comparateur.

Le signal de référence ou consigne arrive

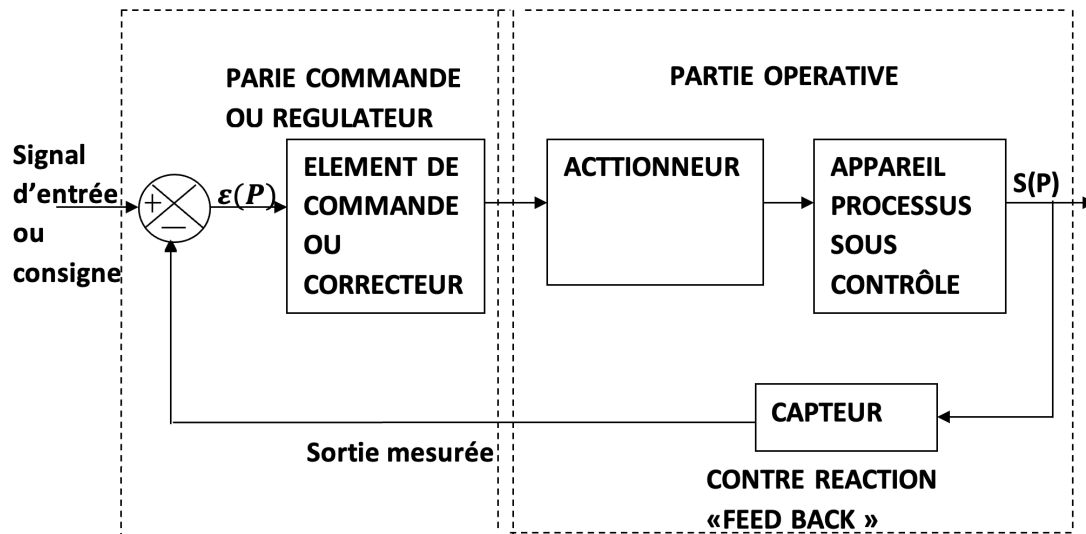


Fig.15

2-441 Définition de Chaîne directe

..... en suivant le sens positif du parcours.

2-442 Définition de Chaîne de retour

C'est l'ensemble de tous les éléments

..... en suivant le sens positif du parcours (capteur de mesure par exemple).

2-443 Définition de Système en boucle ouvert

Il correspond à un système en boucle fermée avec

..... retour juste avant le comparateur (Seule la chaîne directe est active).

2-5 TRANSFORMÉE DE LAPLACE

2-51 DÉFINITION ET NOTATION DE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

C'est un des
.....

Il convient de comprendre que parce que du schéma de montage qui traduit la relation entre éléments du circuit, nous utilisons non plus le schéma de relation des éléments mais un autres où les éléments ne sont plus que des équivalents d'où la **FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME**.

On note $L[f(t)] = F(P)$ la transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ de la variable t avec $P = j\omega$ où ω est la fréquence et j l'imaginaire pure. Soit donc en effet :

$L[f(t)] = \dots\dots\dots$ ou **FONCTION DE TRANSFERT DE L'ÉLÉMENT :**

$F(P) = L[f(t)] = \dots\dots\dots$

Exemple 1 : Pour $f(t) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} t^0 \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} t^0 \cdot e^{-Pt} dt \\ \Leftrightarrow F(P) &= -\frac{P}{P} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt = -\frac{1}{P} \int_0^{\infty} -P e^{-Pt} dt = -\frac{1}{P} \int_0^{\infty} d(e^{-Pt}) = -\frac{1}{P} [e^{-Pt}]_0^{\infty} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{P} [0 - 1] &= \frac{1}{P} = \frac{1}{P^{0+1}} \end{aligned}$$

Exemple 2 : Pour $f(t) = t$, on a :

$$F(P) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} t e^{-Pt} dt$$

Posons :

$$u(t) = t \quad \Rightarrow \quad u'(t) = 1$$

$$v'(t) = e^{-Pt} \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{P}{P} \int e^{-Pt} dt = -\frac{1}{P} \int -P e^{-Pt} dt = \int d(e^{-Pt}) = -\frac{e^{-Pt}}{P}$$

$$F(P) = \left[-\frac{te^{-Pt}}{P} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{P} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt = \frac{1}{P} \left[\frac{1}{P} \right] = \frac{1}{P^{1+1}} = \frac{1}{P^2}$$

Exemple 3 : Pour $f(t) = t^2$, on a :

$$F(P) = \dots\dots\dots$$

Posons :

$$u(t) = \dots\dots\dots$$

$$v'(t) = \dots\dots\dots$$

Donc on a :

$$F(P) = \dots\dots\dots$$

On remarque que en allant jusqu'à t^n on trouve qu'on a :

$$F(P) = L[t^n] = \dots\dots\dots$$

Exemple 4 : $f(t) = \cos \omega t$

$$F(P) = \int_0^\infty \cos \omega t e^{-Pt} dt$$

Posons :

$$u(t) = \dots\dots\dots$$

$$v'(t) = \dots\dots\dots$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} F(P) &= -\frac{1}{P} [\cos \omega t e^{-Pt}]_0^\infty - \frac{\omega}{P} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-Pt} dt \\ &= -\frac{1}{P} [0 - 1] - \frac{\omega}{P} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-Pt} dt \\ \Leftrightarrow F(P) &= \frac{1}{P} - \frac{\omega}{P} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-Pt} dt \end{aligned}$$

Posons une fois de plus :

$$\begin{aligned} u(t) = \sin \omega t &\quad \Rightarrow \quad u'(t) = \omega \cos \omega t \\ v'(t) = e^{-Pt} &\quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{e^{-Pt}}{P} \end{aligned}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(P) &= \frac{1}{P} - \frac{\omega}{P} \left[-\frac{1}{P} \sin \omega t e^{-Pt} \right]_0^\infty + \frac{\omega}{P} \int_0^\infty -\omega \cos \omega t \frac{e^{-Pt}}{P} dt \\ \Leftrightarrow F(P) &= \frac{1}{P} - \frac{\omega}{P^2} [0 - 0] - \frac{\omega^2}{P^2} \int_0^\infty \cos \omega t e^{-Pt} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow F(P) = \frac{1}{P} - \frac{\omega^2}{P^2} F(P) \Leftrightarrow F(P) \left[1 + \frac{\omega^2}{P^2} \right] = \frac{1}{P} \\
&\Leftrightarrow F(P) \left[\frac{P^2 + \omega^2}{P^2} \right] = \frac{1}{P} \Leftrightarrow F(P) \left[\frac{P^2 + \omega^2}{P} \right] = 1 \\
&\Leftrightarrow F(P) = \frac{P}{P^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : pour $f(t) = \sin \omega t$, on a :

$$F(P) = \dots\dots\dots$$

Posons :

$$\begin{aligned}
u(t) = \sin \omega t &\implies u'(t) = \omega \cos \omega t \\
v'(t) = e^{-Pt} &\implies v(t) = -\frac{e^{-Pt}}{P}
\end{aligned}$$

Donc on peut écrire :

$$F(P) = \left[-\frac{1}{P} \sin \omega t e^{-Pt} \right]_0^\infty + \frac{\omega}{P} \int_0^\infty \cos \omega t e^{-Pt} dt = \frac{\omega}{P} \int_0^\infty \cos \omega t e^{-Pt} dt$$

Posons encore :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \dots\dots\dots \\
v'(t) &= \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
F(P) &= -\frac{\omega}{P} \frac{1}{P} \left[\cos \omega t e^{-Pt} \right]_0^\infty - \frac{\omega}{P} \frac{\omega}{P} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-Pt} dt \\
&= -\frac{\omega}{P^2} [0 - 1] - \frac{\omega^2}{P^2} F(P) \\
&\Leftrightarrow F(P) = \frac{\omega}{P^2} - \frac{\omega^2}{P^2} F(P) \Leftrightarrow F(P) \left[1 + \frac{\omega^2}{P^2} \right] = \frac{\omega}{P^2} \\
&\Leftrightarrow F(P) \left[\frac{P^2 + \omega^2}{P^2} \right] = \frac{\omega}{P^2} \Leftrightarrow F(P) = \frac{\omega}{P^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Exemple 6 : $f(t) = e^{-at}$

Alors on peut écrire :

$$F(P) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-Pt} dt = \int_0^\infty e^{-(P+a)t} dt = \frac{1}{P+a}$$

REMARQUES

Pour l'équation différentielle du 3^e ordre suivante, d'un système d'entrée $r(t)$ et de sortie $f(t)$ déterminer la fonction de transfert du système :

$$a \frac{d^3 f(t)}{dt^3} + b \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + c \frac{df(t)}{dt} + df(t) = Kr(t) \quad \text{et alors on a :}$$

$$aP^3 F(P) + bP^2 F(P) + cP F(P) + dF(P) = KR(P)$$

$$F(P)[aP^3 + bP^2 + cP + d] = KR(P)$$

2-52 PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

2—521 Transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ par rapport au temps $\frac{df(t)}{dt}$

Alors on a :

$$L \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-Pt} dt$$

Posons :

$$u'(t) = \dots\dots\dots$$

$$v(t) = \dots\dots\dots ;$$

Alors on peut écrire :

$$L \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = [f(t)e^{-Pt}]_0^\infty - \int_0^\infty -P f(t) e^{-Pt} dt = 0 + P \int_0^\infty f(t) e^{-Pt} dt = PF(P)$$

Pour $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, on a :

$$L \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = \int_0^\infty \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-Pt} dt$$

Posons :

$$u'(t) = \dots\dots\dots$$

$$v(t) = \dots\dots\dots$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
 L \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] &= \left[\frac{df(t)}{dt} e^{-Pt} \right]_0^\infty + \int_0^\infty P \frac{df(t)}{dt} e^{-Pt} dt \\
 &= P \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-Pt} dt = P \cdot PF(P) = P^2 F(P)
 \end{aligned}$$

Pour $\frac{d^3 f(t)}{dt^3}$, on va avoir :

$$L \left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right] = \int_0^\infty \frac{d^3 f(t)}{dt^3} e^{-Pt} dt$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= \frac{d^3 f(t)}{dt^3} \implies u(t) = u'(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \\
 v(t) &= e^{-Pt} \implies v'(t) = -P e^{-Pt}
 \end{aligned}$$

Soit donc :

$$L \left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right] = \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-Pt} \right]_0^\infty + \int_0^\infty P \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-Pt} dt = P^3 F(P) \quad \text{et} \quad L \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = P^n F(P)$$

Dans la suite, si on a plusieurs transformées de Laplace ou éléments d'un système, on notera globalement $G(P)$ et $F(P)$ un élément ou petit groupe d'éléments. Donc la fonction de transfert global $G(P)$ est pour le système du 3^e ordre ci-dessus :

$$G(P) = \frac{F(P)}{R(P)} = \frac{K}{aP^3 + bP^2 + cP + d}$$

2-522 Transformée de Laplace inverse de $f(t)$ notée $L^{-1}[F(P)]$, soit :

$$L^{-1}[F(P)] = f(t)$$

Lorsque la fonction de transfert $G(P)$ se présente sous forme . , on la décompose en éléments simple de façon à pouvoir exploiter

.....

Exemple :

$$G(P) = \frac{2P + 5}{(P + 3)(P + 10)}$$

Décomposons de $G(P)$:

$$\begin{aligned}
 G(P) &= \frac{2P + 5}{(P + 3)(P + 10)} = \frac{A}{P + 3} + \frac{B}{P + 10} \\
 &= \frac{A(P + 10) + B(P + 3)}{(P + 3)(P + 10)} = \frac{P(A + B) + 10A + 3B}{(P + 3)(P + 10)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \iff \dots\dots\dots \\ 10A + 3(2 - A) = 5 \iff \dots\dots\dots \end{cases} \iff \begin{cases} B = \dots\dots\dots \\ A = \dots\dots\dots \end{cases}$$

La fonction de transfert peut encore s'écrire :

$$G(P) = \dots\dots\dots$$

La sortie $f(t) = -\frac{1}{7}e^{-3t} + \frac{15}{7}e^{-10t}$

2-523 Théorème de la valeur finale

Si $f(t)$ existe, la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infinie, à la condition que cette limite existe est égale à $\dots\dots\dots$

Exemple : $f(t) = 3 - e^{-5t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (3 - e^{-5t}) = 3$$

$$F(P) = \frac{3}{P} - \frac{1}{P+5} = \frac{3P+15-P}{P(P+5)} = \frac{2P+15}{P(P+5)}$$

Alors on a :

$$\lim_{P \rightarrow 0} PG(P) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{2P+15}{P(P+5)} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{2P+15}{P+5} = \frac{0+15}{0+5} = 3$$

2-524 Théorème de la valeur initiale

Si $f(t)$ existe, la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 0, à la condition que cette limite existe, est égale à $\dots\dots\dots$

Exemple : $f(t) = 1 - 3e^{-2t}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 3e^{-2t}) = -2$$

$$f(t) = 1 - 3e^{-2t} \implies F(P) = \frac{1}{P} - \frac{3}{P+2} = \frac{P+2-3P}{P(P+2)} = \frac{-2P+2}{P(P+2)}$$

Alors on a :

$$\lim_{P \rightarrow \infty} PG(P) = \lim_{P \rightarrow \infty} P \frac{-2P+2}{P(P+2)} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{-2P+2}{P+2} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{2}{P}}{1 + \frac{2}{P}} = \frac{-2+0}{1+0} = -2$$

2-6 DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT À PARTIR DU SCHÉMA DE MONTAGE

2-61 DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT OU TRANSMITTANCE

La fonction de transfert est
 On note :

$$G(P) = \frac{L[\text{SORTIE}]}{L[\text{ENTREE}]}$$

Si on note l'entrée $X(P)$ et $Y(P)$ la sortie, on a :

$$G(P) =$$

2-62 DÉTERMINATION DE LA FORME GÉNÉRALE DE LA FONCTION DE TRANSFERT

Soit un système défini par une équation différentielle d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

$$Y(P)[a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + a_{n-2} P^{n-2} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0]$$

$$= X(P)[b_0 + b_1 P + b_2 P^2 + \dots + b_m P^m]$$

Alors l'expression de $G(P)$, est donc

$$G(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$$

$$\Leftrightarrow G(P) = \frac{.....}{.....}$$

n est l'ordre de l'équation différentielle ou l'ordre du système.

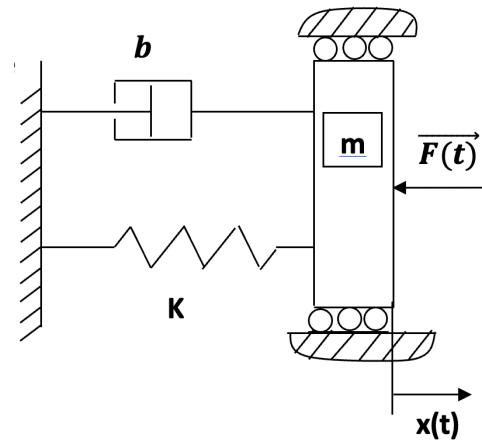


Fig.16

Exemple 1 :

Déterminer la fonction de transfert d'un système de la Fig. 16 dont les signes d'entrée $r(t)$ et de sortie $c(t)$ sont définies par l'équation différentielle suivante :

$$5 \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = 7 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - 3r(t)$$

Solution

.....

l'ordre du système est 3.

Exemple 2 :

La masse m sous la force $F(t)$ en entrée est amortie par un système constitué de ressort à raideur K et amortisseur à frottement visqueux de constante b . Déterminer la fonction de transfert (Fig. 16).

Solution

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

.....

$$kx(t) + b \frac{dx(t)}{dt} - F(t) = -m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow X(P)[\dots\dots\dots] = F(P)$$

$$G(P) = \frac{X(P)}{F(P)} = \dots\dots\dots$$

2-63 TRACÉS DES SCHÉMAS FONCTIONNELS

Pour tracer le schéma fonctionnel d'un système, il faut dans l'ordre :

- 1) Écrire les équations qui décrivent le comportement dynamique de chaque composant ou élément du système ;
- 2) déterminer les transformées de Laplace de chaque équation (condition initiale nulle) ;
- 3) représenter chaque équation transformée sous forme d'un schéma bloc ;
- 4) assembler l'ensemble des schémas blocs pour obtenir le schéma fonctionnel du système global ;
- 5) simplifier, si possible, le schéma obtenu et le mettre sous forme canonique.

Exemple 3 : Circuit électrique RC de la Fig. 17.

Déterminer le schéma fonctionnel du circuit RC de la Fig. 17.

Solution

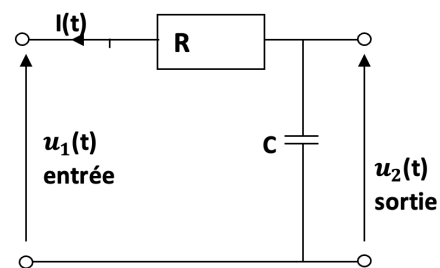


Fig.17

$$1) u_1(t) - u_2(t) = Ri(t)$$

$$\Leftrightarrow U_1(P) - U_2(P) = RI(P)$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{R}\varepsilon(P)$$

C'est un comparateur qui est vu ici en Fig. 18.

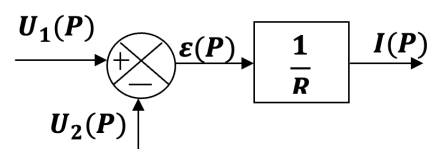


Fig.18

$$2) u_2(t) = \int_0^x \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow U_2(P) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt} e^{-Pt} dt$$

$$U_2(P) = \int_0^x [\dots\dots\dots] \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt}$$

$$U_2(P) = \int_0^x \frac{1}{P} \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{CP} I(P)$$

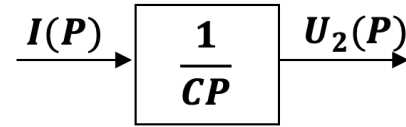


Fig.19

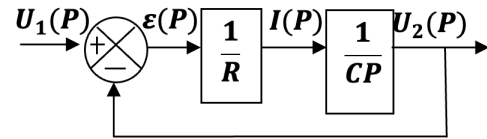


Fig.20

La Fig. 19 indique la boîte.

La Fig. 20 donne le schéma fonctionnel.

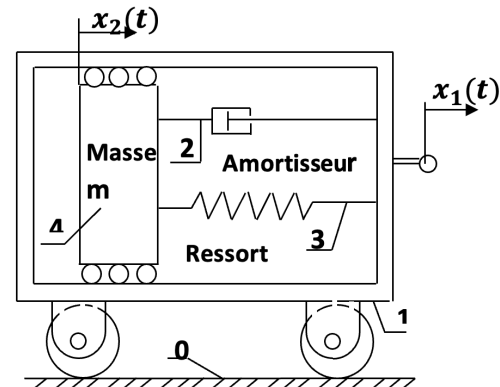


Fig.21

Exemple 4 : Chariot de l'accéléromètre (Fig. 21) :

Le chariot de l'accéléromètre se déplace de $x_1(t)$ variable d'entrée. La masse m , libre de translater à l'intérieur du chariot (frottement négligé), se déplace de $x_2(t)$, variable de sortie. x_2 est mesurée à partir de la position d'équilibre où $x_1 = 0$.

1) Établir l'équation différentielle du système.

2) Dédire de 1) ci-dessus la fonction de transfert du système.

3) Établir le schéma fonctionnel du système.

Solution :

a) De la masse

Il convient de remarquer que nous avons pour m_4 un mouvement composé : translation de la masse m_4 par rapport au chariot de $x_2(t)$ et translation du cadre du chariot par rapport au sol de $x_1(t)$.

Alors il convient ici de diviser le système en deux ensemble : la masse m_4 appliqué en dynamique des systèmes en Fig. 22 et l'autre le chariot et le système amortisseur comme vu plus haut en dynamique des systèmes :

De la masse m_4

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire, pour une masse comme m_4 et une force fictive $F(t)$ qui lui est appliquée :

$$F(t) = m_4 \ddot{x}_2 = m_4 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow F(P) = m_4 P^2 X_2(P)$$

En poursuivant sur le deuxième schéma, nous avons :

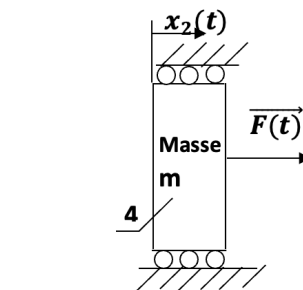
$$-F(t) + f \left[\frac{d[x_1(t) - x_2(t)]}{dt} \right] + K[x_1(t) - x_2(t)] = 0$$

$$\Leftrightarrow F(p) = \dots\dots\dots$$

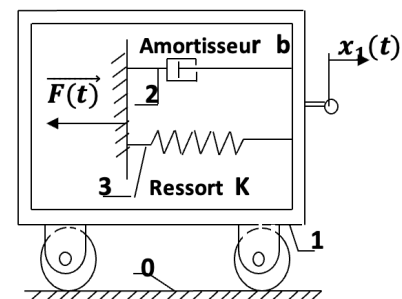
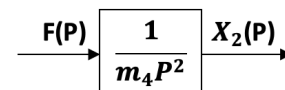
.....
.....

Remarque :

Le schéma bloc est en Fig. 22.



m_4 en dynamique des systèmes



Dynamique des systèmes

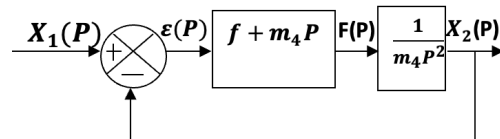


Fig.22

2-7 ÉTUDE GÉNÉRALE DES COMPORTEMENTS DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

Les comportements des systèmes bouclés sont mis en évidence et définis par trois caractéristiques fondamentales (Fig. 23) : la précision $i(t) = r(t) - c(t)$, la rapidité t et la stabilité $\varepsilon(t)_{su} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$.

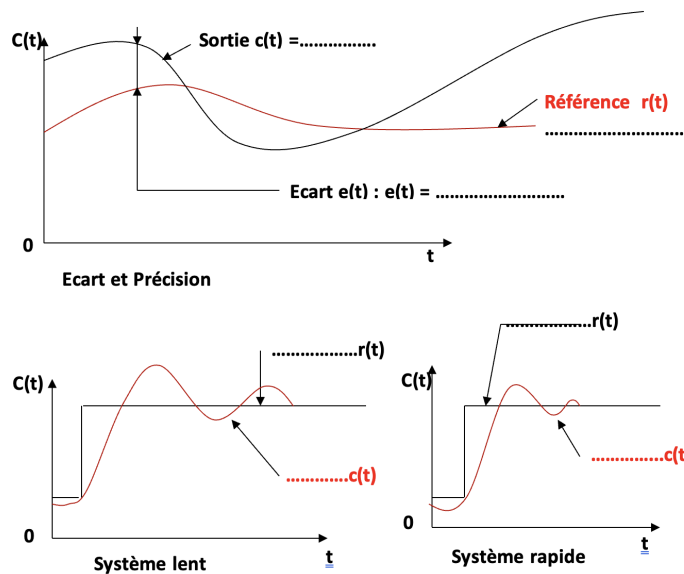


Fig.23

1) PRECISION D'UN SYSTEME

Elle traduit notée $e(t)$ avec laquelle la réponse $c(t)$ « ou grandeur réglée » suit la consigne ou référence $r(t)$. Cela se traduit par l'écart

$$e(t) = \dots\dots\dots$$

2) RAPIDITE D'UN SYSTEME

Elle caractérise la après une perturbation. C'est la durée $t_s(t)$

Il s'agit de l'aptitude du système à réagir dans le temps le plus court (« Temps de réponse ») pour se rapprocher de la consigne après une perturbation.

3) STABILITE D'UN SYSTEME

Elle traduit la à revenir à la position d'équilibre après une perturbation. Elle se traduit par l'écart à l'infini

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad \text{ou de} \quad e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

En Fig. 24, on indique comment reconnaître l'état de contrôle en observant la courbe :

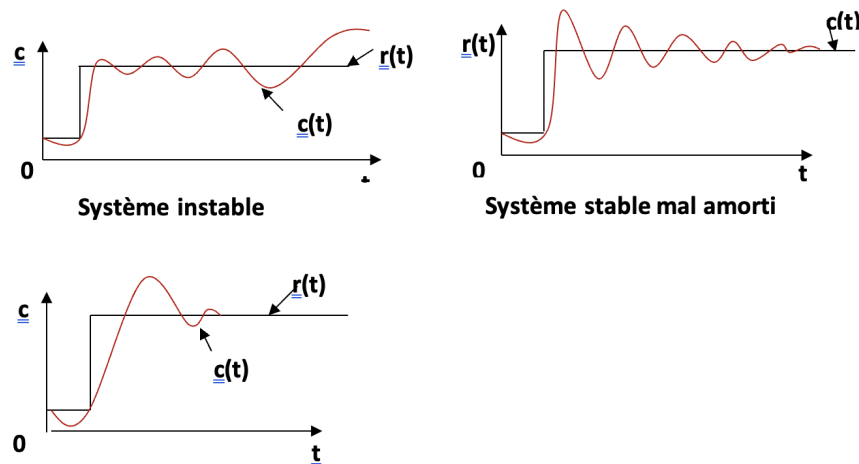


Fig.24

2-71 ÉTUDE DES RÉPONSES DES SYSTÈMES ASSERVIS

Le comportement dynamique d'un système, c'est-à-dire la façon dont il réagit au cours du temps dépend de la nature de l'entrée qui peut se présenter sous des formes variées.

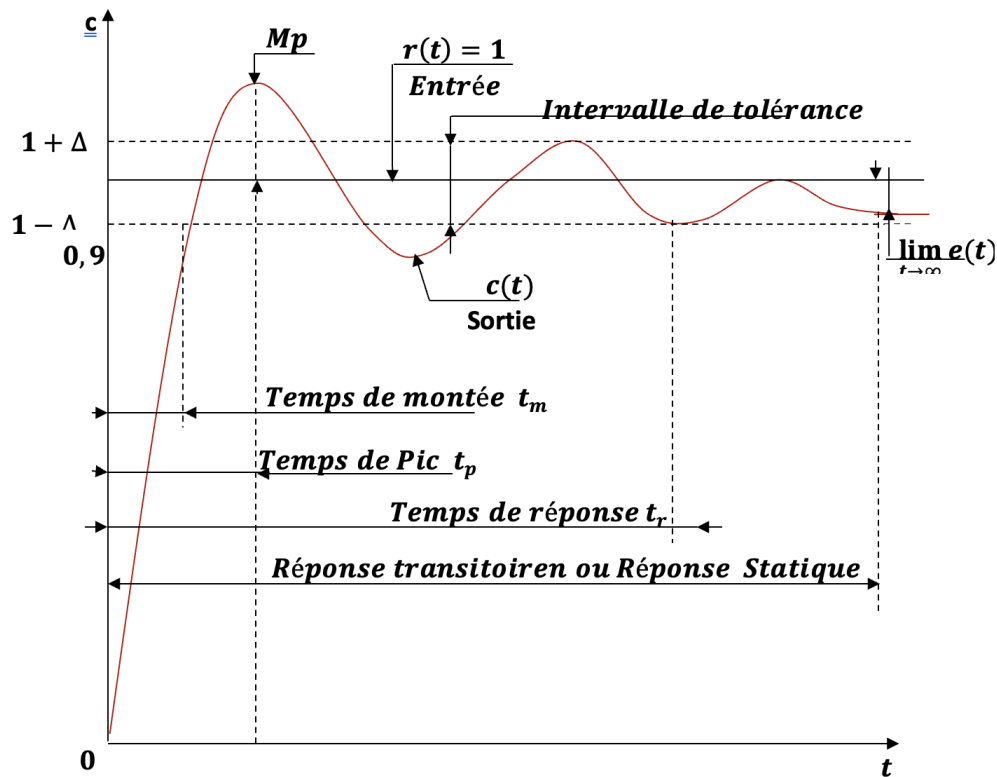
Les études temporelles usuelles utilisent quelques entrées types signaux tests :

..... , , Des réponses plus complexes pourront toujours être obtenues par combinaison ou « superposition » des réponses types de ces signaux tests.

1) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

PÉRIODE TRANSITOIRE : Principaux paramètres	
Paramètres	Définitions
t_m	Temps de montée : Temps nécessaire pour que la réponse passe de 10 à 90% (ou 5 à 95%, ou encore de 0 à 100%) de la réponse finale
M_p	Dépassement maximum : Valeur du dépassement maximum mesurée à partir de l'unité (ou de la valeur finale). Peut être exprimé en %
t_r	Temps de réponse : Temps mis par la réponse pour se stabiliser dans un intervalle compris entre 5% et -5% (ou 2% et -2%) de la valeur finale
$e(\infty)$	Écart en régime établi : Valeur de l'écart $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

2) CAS DE LECTURE D'UN TYPE DE COURBES DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE EN Fig. 25



Ecart en régime établi : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

Fig.25

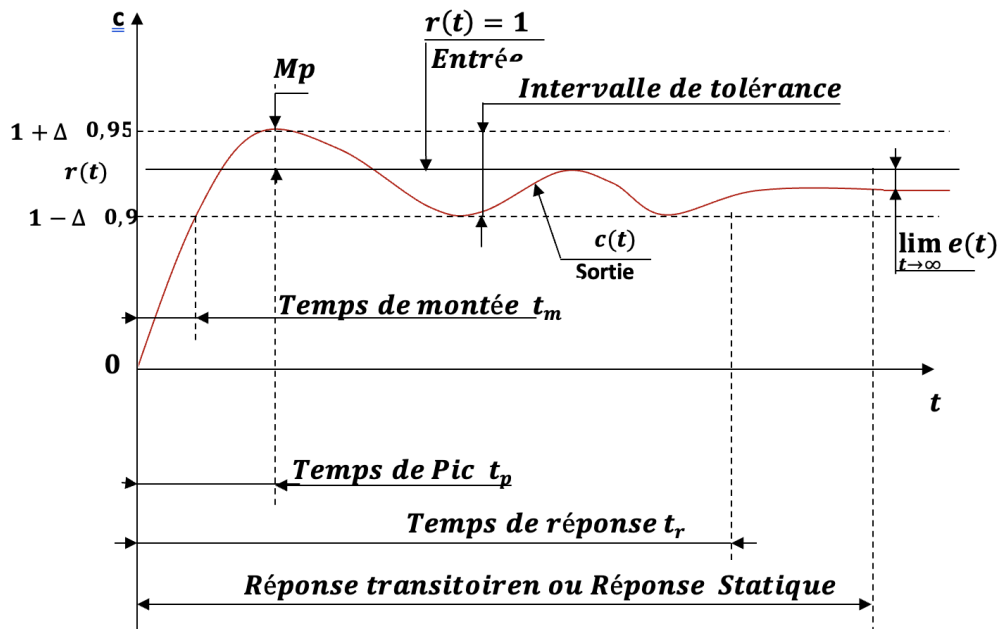
REMARQUES

Remarque 1 : Au point $O(0,0)$ le système est au repos et aucune sollicitation n'a lieu. La réponse $c(t) = 0$. À $0 < t < t_m$, le système a démarré, est en mouvement pour atteindre le temps de montée t_m à l'entrée de la zone de tolérance. À t_m , le système entre dans la zone de tolérance, évolue et arrive à l'horizontale A, de référence $r(t)$ ou consigne. Le système se trouve alors en régime permanent s'il suit cet horizontal ou lui est parallèle durant le fonctionnement, il est en fonctionnement normal.

Remarque 2 : En cas de perturbation, trois situations de réaction non pas simultanément, mais l'un suivi de l'autre :

- 1) la courbe de la réponse $c(t)$ sort de cette zone de tolérance d'un côté, puis revient de l'autre et rentre en zone ;
- 2) la courbe oscille dans la bande de tolérance et n'est pas parallèle à l'asymptote ;
- 3) la réponse oscille en amplifiant ou non mais toujours en train d'aller hors de la zone de tolérance.

3) EXEMPLE DE LECTURE DU TYPE DE COURBES DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE EN APPLICATION (Fig. 26)



Ecart en régime établi : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

Fig.26

TEXTE 1 À CE PROBLÈME

$r(t) = 1$ n'est qu'à titre indicatif ici où $r(t) = 1$. En fonction des problèmes, bien des nombres n pourront selon les cas être trouvés. Par exemple 140 tours.

En effet si on lit $r(t) = E_0$, on aura :

$$R(P) = \frac{E_0}{P}. \text{ Pour } r(t) = 1, R(P) = \frac{1}{P}.$$

Si on dit la consigne est échelon $E_0 = 60$ trs, on aura :

$R(P) = \frac{E_0}{P}$, soit $R(P) = \frac{60}{P}$ et si la consigne est rampe de 120 trs/mn en 5 secondes, on aura pour une fonction du 1^{er} degré $G(P) = \frac{2}{1+TP}$:

$$G(P) = \frac{C(P)}{R(P)} = \frac{2}{1+TP} \iff C(P) = G(P)R(P)$$

$$\text{Consigne rampe } r(t) = at \iff r(t) = \frac{10,2 \cdot \pi}{60 \cdot 5} t = 2,5t \iff R(P) = \frac{2,5}{P^2}$$

$$\text{Donc on va avoir comme réponse } c(t) = L^{-1}[C(P)] = L^{-1}\left[\frac{2}{1+TP} \cdot \frac{2,5}{P^2}\right]$$

Il suffit de décomposer ceci et rechercher les transformées de Laplace inverses.

4) EXEMPLE DE LECTURE DE COURBES DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE, GRADUATION EN Fig. 28

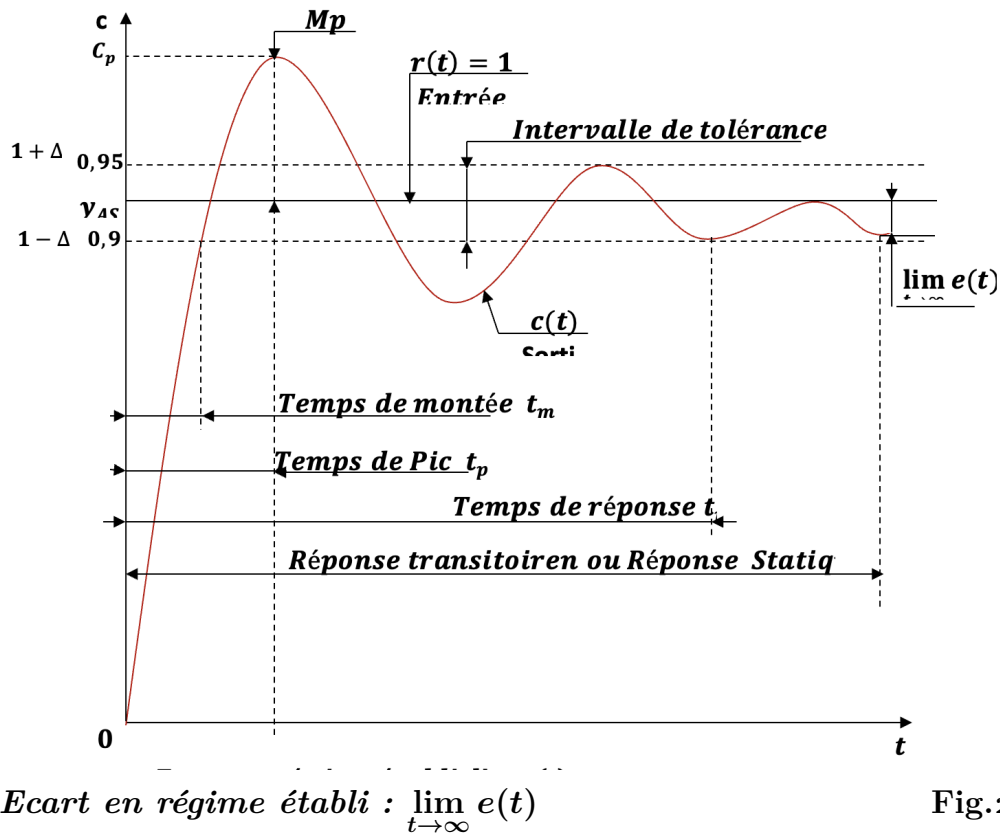


Fig.28

REMARQUES SUR DES RÉPONSES À CE PROBLÈME

Si la consigne $r(t)$ est donnée en nombre de tour n , l'asymptote As est en tours sur l'ordonnée, par nombre de tours N mais donnée par :

$$\lim_{P \rightarrow 0} P G(P) \cdot R(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

Pour $G(P) = \frac{K}{1 + \tau P}$ du premier ordre et consigne échelon n , pour N :

$$\lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{K}{1 + \tau P} \cdot \frac{n}{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = As \iff \lim_{P \rightarrow 0} \frac{K}{1 + \tau P} \cdot n = As$$

$$\iff \lim_{P \rightarrow 0} \frac{K}{\tau \left[\frac{1}{\tau} + P \right]} \cdot n = As \iff \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\frac{K}{\tau} n}{\frac{1}{\tau} + P} = \frac{\frac{K}{\tau} n}{\frac{1}{\tau}} = As$$

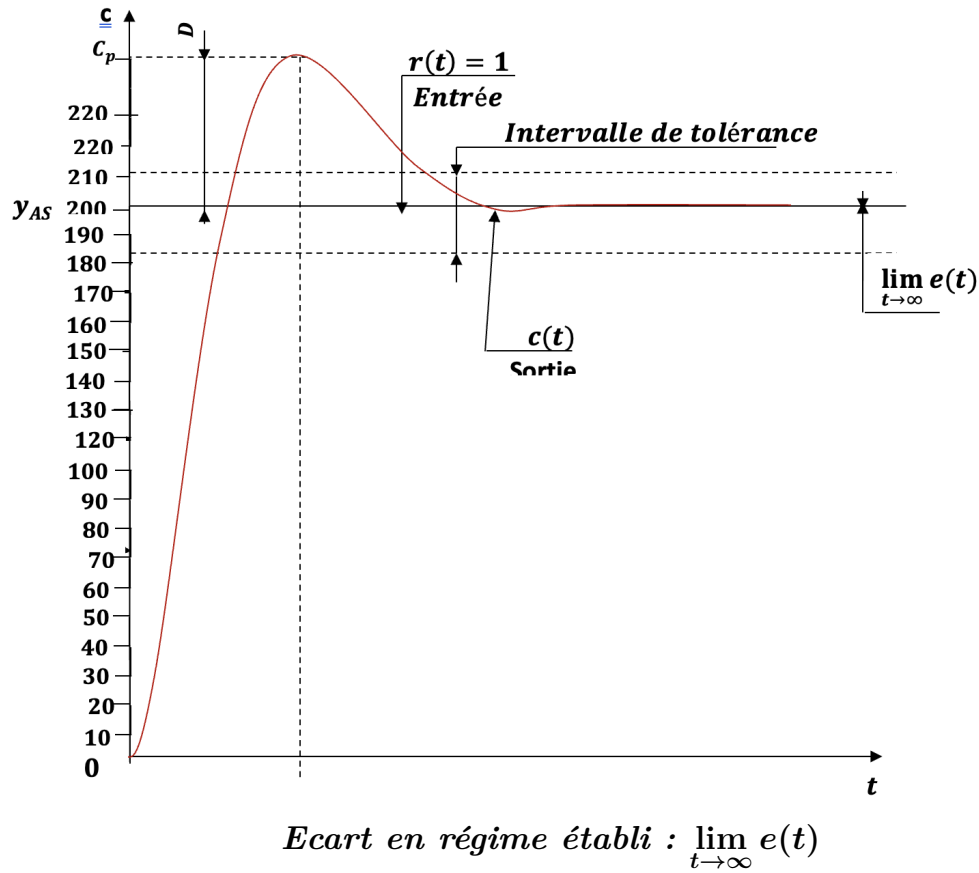
$$\iff As = K \cdot n = \lim_{t \rightarrow \infty} K \cdot n \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right] \iff K = \frac{As}{n} = \frac{N}{n}$$

$$M_p = OC_p - Ay_{As}$$

L'erreur statique e_s est donnée par :

$e_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$ et traduit l'état de la stabilisation

5) EXEMPLE DE LECTURE DU DE COURBES DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE GRADUATION EN Fig. 29



REMARQUES SUR DES RÉPONSES À CE PROBLÈME

Cette courbe correspond aux fonctions du second ordre de la forme

$$G(P) = \frac{C(P)}{R(P)}$$

Où

$$Hm(P) = \frac{K_m}{1 + \frac{2z}{\omega_0}P + \frac{1}{\omega_0^2}P^2}$$

Le premier dépassement est donné par

$$D = K E_0 e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$t_D = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

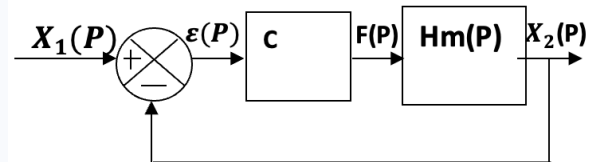
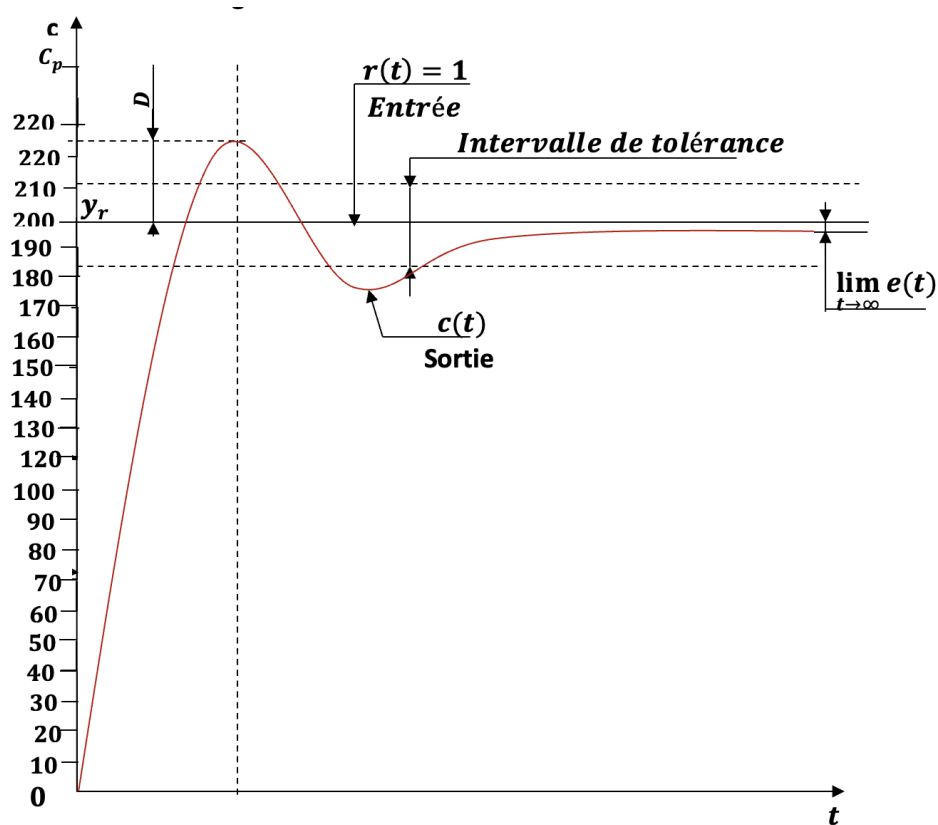


Fig.29

6) EXEMPLE DE LECTURE DU DE COURBES DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE, GRADUATION EN Fig. 30



Ecart en régime établi : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

Fig.30

REMARQUES SUR DES RÉPONSES À CE PROBLÈME

L'asymptote est donnée par :

$$y_{As}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

$r(t)$ est une référence qui indique que si l'asymptote est la valeur de $e(t)$, cela doit être appréciée par rapport à la référence qui est une donnée constructeur.

$E(t)$ se dégrade par rapport au degré de défektivité des organes qui constituent l'appareil sujet d'étude.

Exemple :

- la référence indique $r(t) = 1$
- L'état de la voiture indique 0,95
- l'évaluateur qui teste la voiture trouve $e(t) = 0,4 < \Delta = 0,5$: c'est bon.
- l'évaluateur qui teste la voiture trouve $e(t) = 0,6 > \Delta = 0,5$: c'est mauvais. La voiture va tuer d'un moment à l'autre céder.

7) COURBES DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE AVEC ENTRÉES TYPES FONDAMENTAUX

2-851 ECHELON

L'échelon est.....

.....

Par exemple, l'échelon unité correspond au passage de 0 à 1.

2-852 REPONSE INDICIELLE

C'est $r(t)=1$

2-853 ENTRÉE RAMPE

C'est

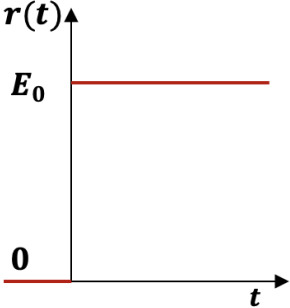
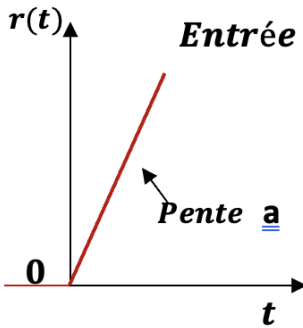
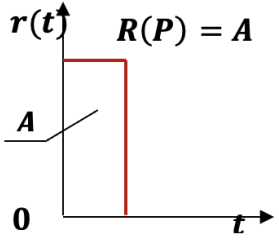
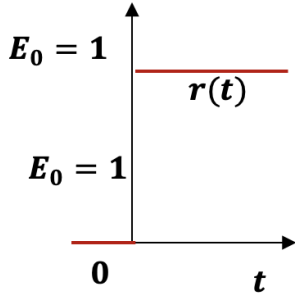
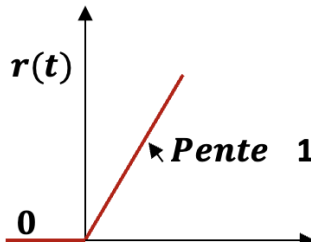
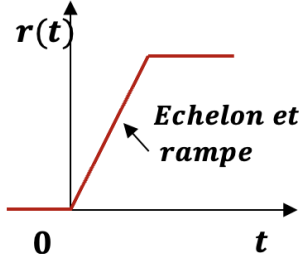
Elle permet d'observer la réponse d'un système en mode poursuite.

2-854 ENTREE IMPULSION

C'est un signal, mais suffisamment durable pour engendrer une sortie mesurable.

Elle permet d'observer la réponse d'un système à une perturbation soudaine et passager.

Dans le cas d'une impulsion unité ou impulsion de DIRAC, l'aire de la courbe de $r(t) = \delta(t)$ donne $R(P) = A$ égale à 1 quelle que soit la forme de la coube.

<i>Signal</i>	<i>Entrée Echelon</i> $r(t) = E_0$ $\Rightarrow R(P) = \frac{E_0}{p}$	<i>Entrée Rampe</i> $r(t) = at$ $\Rightarrow R(P) = \frac{a}{p^2}$	<i>Entrée Impulsion</i> $r(t) = \delta(t)$ $\Rightarrow R(P) = A$
<i>Entrée de base</i>	 $r(t) = E_0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$	 $r(t) = 0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$	 $r(t) = \delta(t)$ $r(t) = 0$ si $\delta(t) < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$
	 $E_0 = 1$ $E_0 = 1$	 $r(t) = 0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$	 <i>Echelon et rampe</i>

2-72 ÉTUDE DES SYSTÈMES DU 1^{er} ORDRE

1) DÉFINITION DE SYSTEME DU 1^{er} ORDRE

Un système du 1^{er} ordre d'entrée $r(t)$

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t)$$

2) PARAMÈTRES

T=

K=

3) FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME DU 1^{er} ORDRE

La fonction de transfert est donnée par :

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t) \iff C(P) \cdot [TP + 1] = K \cdot R(P)$$

$$\iff G(P) = \frac{C(P)}{R(P)} = \dots\dots\dots$$

Les propriétés générales des systèmes du 1^{er} ordre aux entrées types signaux fondamentaux sont consignées ci-dessous en schéma de la Fig. 31 pour cas de $K = 1$.

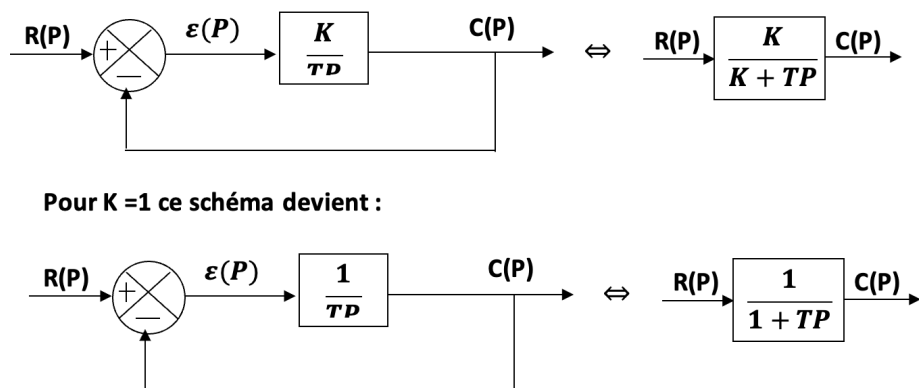


Fig.31

3) TRACÉ DE COURBE DES REPONSES $c(t)$

On sait que la fonction de transfert est donnée par :

$$G(P) = \frac{C(P)}{R(P)} \iff C(P) = G(P) \cdot R(P)$$

a) Lorsque la consigne est échelon unité $r(t) = 1$, $R(P) = \frac{1}{P}$ D'où

$$\begin{aligned} C(P) &= \frac{1}{1+TP} \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{T\left(\frac{1}{T} + P\right)} \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{T} \left[\frac{A}{P} + \frac{B}{\frac{1}{T} + P} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{A\left(\frac{1}{T} + P\right) + BP}{P\left(\frac{1}{T} + P\right)} \right] = \frac{1}{T} \left[\frac{P(A+B) + A\frac{1}{T}}{P\left(\frac{1}{T} + P\right)} \right] \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{A}{T}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ \frac{A}{T}=1 \iff A=T \end{cases}$$

$C(P)$ peut donc être écrite $C(P) = \frac{1}{T} \left[\frac{T}{P} - \frac{T}{\frac{1}{T} + P} \right]$

ce qui donne $c(t)$:

$$c(t) = \frac{1}{T} \left[T - Te^{-\frac{t}{T}} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = 1$$

Le tracé de la courbe de $c(t)$ est sur la Fig. 31.

Lorsque la consigne est Impulsion unité,

$$r(t) = \delta(t) \implies R(P) = A = 1 \text{ d'où}$$

$$C(P) = G(P) \cdot R(P) = \frac{1}{1+TP} \cdot 1 \implies C(P) = \frac{1}{T\left(\frac{1}{T} + P\right)}$$

Donc :

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{1}{T}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = 0$$

La Fig. 32 donne la courbe.

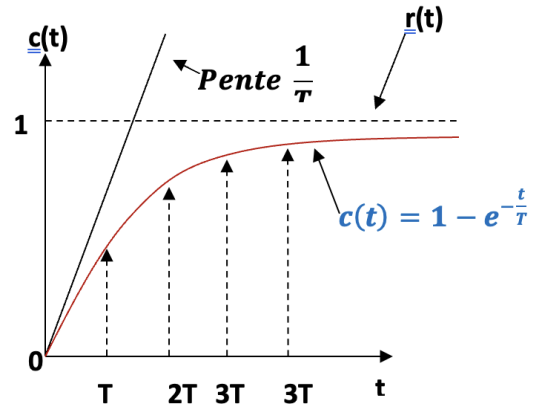


Fig.31

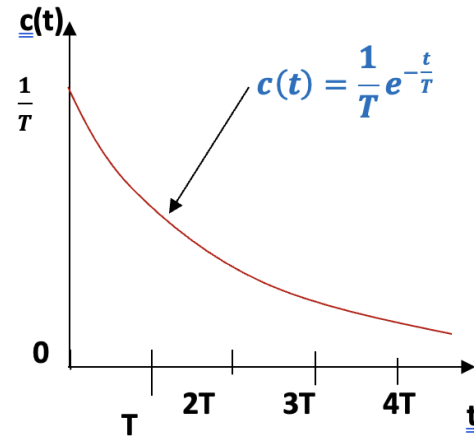


Fig.32

4) CALCUL D'ÉCART OU ERREUR DES SYSTÈMES DU 1^{er} ORDRE

A une consigne $r(t)$ et une sortie $c(t)$ d'un système, l'erreur ou écart est donné par :

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

A la consigne rampe, $r(t) = at$ et pour rampe unité, $r(t) = t \implies R(P) = \frac{1}{P^2}$

Pour $G(P) = \frac{K}{1+TP}$ et comme $K = 1$, $G(P) = \frac{1}{1+TP}$ donne :

$$C(P) = G(P) \cdot R(P) = \frac{1}{P^2} \cdot \frac{1}{1+TP} = \frac{1}{P^2} \frac{1}{T\left(\frac{1}{T} + P\right)} = \frac{1}{T} \left[\frac{A}{P} + \frac{B}{P^2} + \frac{D}{P + \frac{1}{T}} \right]$$

$$\iff C(P) = \frac{1}{T} \left[\frac{AP\left(P + \frac{1}{T}\right) + B\left(P + \frac{1}{T}\right) + DP^2}{P^2\left(P + \frac{1}{T}\right)} \right]$$

$$\iff C(P) = \frac{1}{T} \left[\frac{P^2(A + D) + P\left(\frac{A}{T} + B\right) + \frac{B}{T}}{P^2\left(P + \frac{1}{T}\right)} \right]$$

$$\iff \begin{cases} A + D = 0 \\ \frac{A}{T} + B = 0 \\ \frac{B}{T} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} D = -A = 0 \\ \frac{A}{T} + B = 0 \\ B = T \end{cases} \implies \frac{A}{T} + T = 0 \iff A = -T^2 \iff \begin{cases} A = -T^2 \\ B = T \\ D = T^2 \end{cases}$$

La fonction de transfert d'un système du 1^{er} ordre à une entrée rampe unité est donc :

$$C(P) = \frac{1}{T} \left[\frac{-T^2}{P} + \frac{T}{P^2} + \frac{T^2}{P + \frac{1}{T}} \right] = -\frac{T}{P} + \frac{1}{P^2} + \frac{T}{P + \frac{1}{T}}$$

La réponse est donc donnée ainsi :

$$c(t) = -T + t + T e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-T + t + T e^{-\frac{t}{T}} \right) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-T + t + T e^{-\frac{t}{T}} \right) = \infty$$

La courbe est en Fig. 33.

Il ressort que si nous voulons calculer son erreur, nous avons :

$$e(t) = \dots\dots\dots$$

$$\iff e(t) = t - \left(-T + t + T e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$\iff e(t) = T - T e^{-\frac{t}{T}} = T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} e(t) = \lim_{t \rightarrow 0} T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = T$$

La courbe est en Fig. 34.

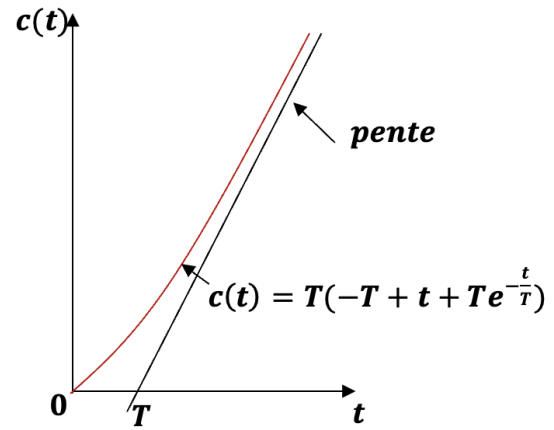


Fig.33

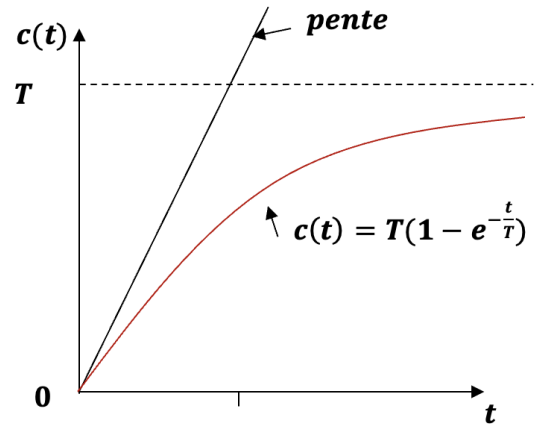


Fig.34

5) ETUDES DES REPONSES DES SYSTEMES DU 1^{er} ORDRE AUX ENTREES USUELLES

Entrée : $r(t)$ $r(t) = 0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$	Entrée Echelon : $r(t) = E_0$: $r(t) = 0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$	Entrée Rampe : $r(t) = at$ $r(t) = 0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$	Entrée Impulsion $r(t) = \delta(t)$ $r(t) = 0$ si $t < 0$ $r(t) \neq 0$ si $t \geq 0$
Transformée $R(P)$ de $r(t)$	$R(P) = \frac{E_0}{P}$	$R(P) = \frac{a}{P^2}$	$R(P) = A$
$G(P) = \frac{C(P)}{R(P)}$ du 1 ^{er} Ordre $\Rightarrow \frac{C(P)}{R(P)} = \frac{K}{1+TP}$ $C(P) = \frac{K}{1+TP} R(P)$	$C(P) = \frac{K}{1+TP} \cdot \frac{E_0}{P}$	$C(P) = \frac{K}{1+TP} \cdot \frac{a}{P^2}$	$C(P) = \frac{K}{1+TP} \cdot A$
Décomposition en éléments simples	$C(P) = \frac{E_0 K}{P} - \frac{E_0 K T}{1+TP}$	$C(P) = \frac{a K}{P^2} - \frac{a K T}{P} + \frac{a K T^2}{1+TP}$	$C(P) = \frac{K}{1+TP}$
Réponse $c(t)$ $t \geq 0$	$c(t) = E_0 K (1 - e^{-\frac{t}{T}})$	$c(t) = a K (t - T + T e^{-\frac{t}{T}})$	$c(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
Dérivée $c'(t)$: $c'(t) = \frac{dc(t)}{dt}$	$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{E_0 K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ $t = 0 \rightarrow$ Pente $\frac{E_0 K}{T}$ $t = \infty \rightarrow 0$	$\frac{dc(t)}{dt} = a K (1 - e^{-\frac{t}{T}})$ $t = 0 \rightarrow$ Pente 0 $t = \infty \rightarrow$ Pente $a K$	$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$ $t = 0 \rightarrow$ Pente $-\frac{K}{T^2}$ $t = \infty \rightarrow 0$

REMARQUES

2-73 ÉTUDE DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^{ème} ORDRE AUX ENTRÉES USUELLES

De nombreux asservissements se comportent comme des systèmes du deuxième ordre d'entrée $r(t)$ et la sortie $c(t)$ obéit à l'équation différentielle du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t)$$

$K = \dots \quad \xi = \dots \quad \omega_n = \dots$

1) FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME DU 2^{ème} ORDRE

L'équation différentielle ci-dessus permet d'écrire :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t) \iff C(P) \left[\frac{1}{\omega_n^2} P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1 \right] = KR(P)$$

Or la fonction de transfert est donnée par $G(P) = \frac{C(P)}{R(P)}$, soit $G(P) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1}$

2) RÉPONSE $c(t)$ D'UN SYSTÈME DU 2^e ORDRE D'ENTRÉE $r(t)$, ÉCHELON UNITÉ ET $K = 1$

Alors on a :

$G(P) = \dots$

$$\iff G(P) = \frac{\omega_n^2}{P^2 + 2\xi\omega_n P + \omega_n^2} = \frac{C(P)}{R(P)} \iff C(P) = G(P) \cdot R(P) \iff C(P) = \dots$$

Pour obtenir la réponse $c(t)$, il faut décomposer cette fraction obtenue en éléments simples et, à cette fin déterminer les pôles de la fonction de transfert ou

.....

Plusieurs cas se présentent en fonction de la valeur de ξ :

$$\Delta = 4 \left[\frac{\xi}{\omega_n} \right]^2 - 4 \left[\frac{1}{\omega_n} \right]^2 = \left(\frac{2}{\omega_n} \right)^2 [\xi^2 - 1] \iff \left(\frac{2}{\omega_n} \right)^2 (\xi + 1)(\xi - 1)$$

Si $\Delta > 0$,

Si $\Delta < 0$,

Si $\Delta = 0$,

On pose :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Où ω_d est la pulsation ou fréquence propre du système amorti.

3) TABLEAU DES RÉPONSES DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE À $K = 1$ ET ÉCHELON UNITÉ (Fig. 35)

$$K = 1 \text{ et } r(t) = 1 \implies R(P) = \frac{1}{P}$$

ξ	$\xi > 1$	$\xi = 1$	$0 \leq \xi < 1$
Racines P_1 et P_2	P_1 et P_2 réelles $P_1 = \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ $P_2 = \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$	Racine double $P_1 = P_2 = -\omega_n$	2 Pôles complexes conjugués P_1 et P_2 $P_1 = -\xi\omega_n - j\omega_0$ $P_2 = -\xi\omega_n + j\omega_0$
$C(P)$	$\frac{\omega_n^2}{P(P-P_1)(P-P_2)}$	$\frac{\omega_n^2}{P(P+\omega_n)}$	$\frac{\omega_n^2}{P[(P+\xi\omega_n)^2 + \omega_0^2]}$
Décomposition de $C(P)$ (Voir plus haut)	Décomposition de $C(P)$ (Voir plus haut)	Décomposition de $C(P)$ (Voir plus haut)	$\frac{1}{P} - \frac{\omega_n\xi}{(P+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{P+\omega_n\xi}{(P+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$
$c(t)$ avec $t \geq 0$	$\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{1 + e^{P_2 t}}{P_2} - \frac{e^{P_1 t}}{P_1} \right]$	$1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$	$1 - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t - e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t$
Ecart $e(t)$: $e(t) = r(t) - c(t)$	$\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{e^{P_2 t}}{P_2} - \frac{e^{P_1 t}}{P_1} \right]$	$e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$	$e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t$
REMARQUE	Si $\xi \gg 1$, l'une des exponentielles de $c(t)$ décroît plus rapidement que l'autre et peut être négligée		Si $\xi = 0$, la réponse n'est plus amortie et les oscillations continuent indéfiniment $\omega_n = \omega_d$ $e(t) = 1 - \cos \omega_n t$

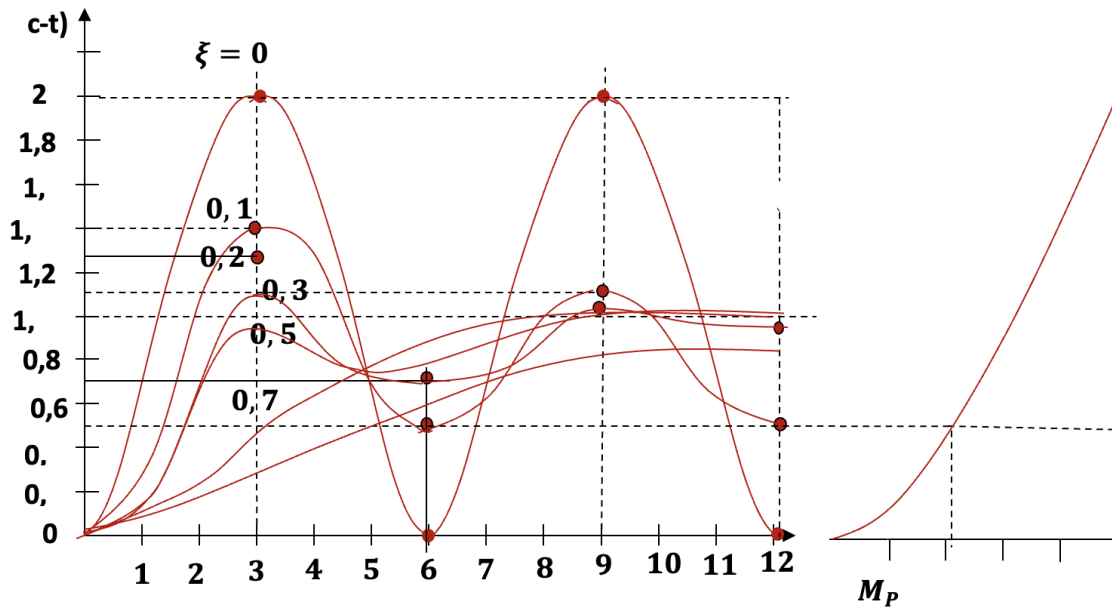


Fig.35

4) PRINCIPAUX PARAMÈTRES DE LA PÉRIODE TRANSITOIRE

- a) Temps de réponse tr : $tr = 4T = \frac{\xi}{\omega_n}$ à $\pm 0,5\%$
- b) Dépassement maximum : $M_p = c\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) - 1 = e^{-(\xi\sqrt{1-\xi^2})}$
- c) Si $0,4 < \xi < 0,8$, $25\% > M_p > 2,5\%$

REMARQUES

Les données ici utilisées permettent d'effectuer les calculs pour but purement académiques. En cas d'utilisations industrielles, des modifications appropriées devront être utiles. Toute la nécessité réside dans la méthode de travail.

5) ÉTUDE DES RÉPONSES $c(t)$ DES SYSTÈMES DU 2^e ORDRE POUR $K = 1$,
À UNE ENTRÉE IMPULSION UNITÉ $r(t) = \delta(t)$

$C(t)$	$C(P) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}P + 1} \cdot 1 = \frac{\omega_n^2}{P^2 + 2\xi\omega_n P + \omega_n^2}$
$C(t)$ $0 \leq \xi < 1$ Avec $t \geq 0$	$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right)$
$C(t)$ $\xi = 1$ Avec $t \geq 0$	$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$
$C(t)$ $\xi > 1$ Avec $t \geq 0$	$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}$
$C(t)$ Max $0 < \xi < 1$	$c(t) = \omega_n e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}$

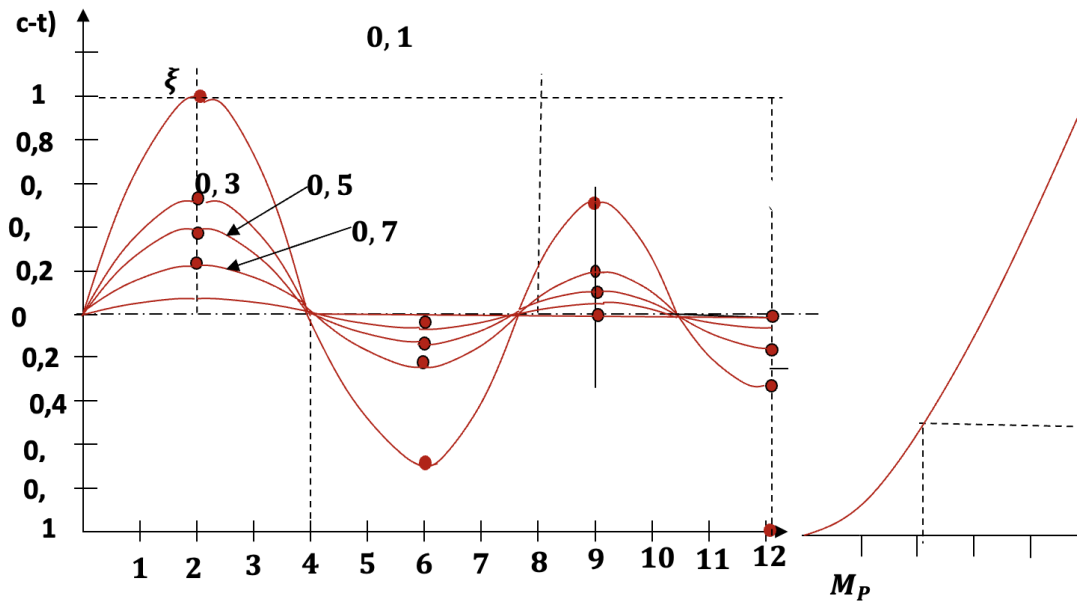


Fig.36